ENSAI

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

L'usage des calculatrices est interdit

Dans la partie I, on calcule la valeur de la somme d'une série. Cette valeur est utilisée dans la partie II pour calculer certaines intégrales et dans la partie III pour calculer la somme d'une série.

Dans la partie IV, on introduit une fonction f de deux variables dont on étudie quelques propriétés.

La partie V a pour objet l'étude de certaines intégrales doubles concernant la fonction f.

À l'exception des questions V.2. et V.3. qui utilisent les résultats de la partie II, les parties IV et V sont indépendantes du reste du problème.

On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE I

1.*a*. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha 2^n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On note S_α sa somme lorsqu'elle converge.

b. Calculer S_1.

2.*a*. Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1]$ de la fonction $x \to x^n \ln x$, où $n \in \mathbb{N}$.

b. Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 x^n \ln x \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \ln x \, dx.$$

3.*a*. Étudier l'intégrabilité sur $]0, 1[$ de la fonction $x \to \dfrac{\ln x}{1-x}$.

b. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$ et montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -(\ln 2)^2 - S_2.$$

4. Calculer en fonction de S_2 la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt.$$

5. Montrer que :

$$S_2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

PARTIE II

On pose :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x^2-1}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln(x+1) - x\ln 2}{x^2-1}\,dx.$$

1. Justifier l'existence de I et J.

2. Montrer que :

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt + \frac{1}{4}(\ln 2)^2.$$

3. Calculer la valeur de I et de J.

PARTIE III

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \frac{-\ln(1-x)}{1+x}\,dx.$$

1.*a*. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{H_n}{n}$?

b. Déterminer un équivalent simple de la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Exprimer l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,dx$ à l'aide de H_{n+1}.

3. Prouver que :

$$K = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{H_n}{n}.$$

4. En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{H_n}{n} = S_2.$$

PARTIE IV

Dans toute la suite du problème, on désigne par A l'ensemble $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et par A_0 l'ensemble A privé du point (0, 0).

On définit l'application $f : A_0 \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}.$$

1. Montrer que :

$$\forall r > 0,\ \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad 0 \leqslant f(r\cos\theta, r\sin\theta) \leqslant r.$$

En déduire que f se prolonge par continuité sur A.

On notera encore f ce prolongement.

2. Déterminer le minimum de f sur A.

3.*a*. Démontrer que si $x > 10$ **ou** $y > 10$, alors $f(x, y) < \frac{1}{10}$.

b. Démontrer que f est majorée sur A et atteint sa borne supérieure sur A.

c. Déterminer le maximum de f sur A. (On commencera par calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un point dans l'intérieur de A).

4. Déterminer $f(A)$.

5.*a*. Montrer que :

$$\forall r > 0,\ \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) \leqslant \frac{1}{r}.$$

b. On pose pour $r > 0$:

$$\varphi(r) = \sup_{\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Déterminer $\lim_{r \to +\infty} \varphi(r)$.

6. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble Δ des couples $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tels que la série de terme général $f(n^\alpha, n^\beta)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, soit convergente.

7.*a*. Établir, pour $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, l'inégalité :

$$f(x, y) \geqslant \frac{1}{4(x+y)}.$$

b. Étudier la sommabilité de la famille $(f(p^2, q^2))_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.

PARTIE V

1. Pour $x \in]0, 1[$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{y\,dy}{(y+1)(x+y)}.$$

2. Démontrer que :

$$\iint_{[0,1]^2} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 (\ln(x+1) - \ln(x))\,dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1}\,dx + J$$

où J a été définie dans la partie II.

3. En déduire la valeur de $\iint_{[0,1]^2} f(x, y)\,dx\,dy$.

4. En utilisant la question IV. 7.*a*., déterminer la limite, pour R tendant vers $+\infty$, de

$$\iint_{[0,R]^2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

5. Déterminer de même la limite, pour R tendantt vers $+\infty$, de l'intégrale :

$$\iint_{[0,R]^2} f^2(x, y)\,dx\,dy.$$

6. Prouver que, pour $n \geqslant 3$, l'intégrale :

$$\iint_{[0,R]^2} f^n(x, y)\,dx\,dy$$

admet une limite finie lorsque R tend vers $+\infty$.